MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

1° E désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de la multiplication et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ celui de l'addition. On appelle matrice scalaire les matrices M de la forme $M = \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). On rappelle la convention usuelle dans tout anneau unitaire : $A^0 = I$. Deux éléments A et B de E sont dits permutables si $AB = BA$.

2° Une suite $\{M_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite convergente, et de limite $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ si et seulement si les quatre suites de nombres complexes $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$, $\{s_n\}_{(n \in \mathbb{N})}$ sont convergentes, et de limites respectives p, q, r, s.

On utilisera la notation $\lim_{n \to \infty} \{M_n\} = M$.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soient A et B deux éléments de E. Montrer que si la famille $\{I, A, B\}$ est liée dans E, alors A et B sont permutables. La réciproque de cette proposition sera établie, en deux parties, en I, 2° et en II, 5°.

I

1° Soit $A \in E$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Vérifier l'égalité matricielle

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0 \tag{1}$$

Pour toute la suite de la partie I, on supposera que A ne possède qu'une valeur propre, que l'on notera α.

2° Montrer que si $B \in E$ et si B permute avec A, alors la famille $\{I, A, B\}$ est liée dans E (on pourra utiliser une transformation $A' = Q^{-1}AQ$, $B' = Q^{-1}BQ$, où Q est une matrice inversible telle que A' soit triangulaire).

3° Déduire de l'égalité (1) que l'on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \alpha^n I + n\alpha^{n-1}(A - \alpha I)$$

4° On définit une suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Montrer que S_n converge.

On notera e^A sa limite.

Exprimer e^A en fonction de A et de I.

La matrice e^A peut-elle être scalaire?

Calculer e^O, et e^A lorsque A est scalaire (O désignant la matrice nulle).

5° On suppose A non scalaire.

Montrer que si B permute avec A, B admet également une valeur propre unique, et que l'on a

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

II

Soit $A \in E$. Dans toute cette partie, on supposera que A admet deux valeurs propres distinctes α_1 et α_2.

1° La matrice A peut-elle être scalaire?

2° On pose $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

.../...

Montrer qu'il existe une matrice P, dépendant de A, telle que

$$A = \alpha_1 P^{-1} I_1 P + \alpha_2 P^{-1} I_2 P$$

Dans toute la suite on posera $M_1 = P^{-1} I_1 P$, $M_2 = P^{-1} I_2 P$.

Calculer $M_1 + M_2$, $M_1 M_2$, M_1^n, M_2^n, puis A^n en fonction de M_1 et M_2.

3° On définit la suite $\{ S_n \}$, comme plus haut, par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k .$$

Montrer que S_n converge.

On notera encore e^A sa limite. Exprimer e^A en fonction de M_1 et M_2.

4° Montrer que la famille $\{ I, A, e^A \}$ est liée.

Exprimer e^A en fonction de I et de A.

5° Montrer que si B permute avec A, la famille $\{ I, A, B \}$ est encore liée (on pourra par exemple étudier $B' = P B P^{-1}$ où P est la matrice introduite au II, 2°).

6° Montrer que si B permute avec A, on a

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$$

III

Il a été établi en I, 5° et en II, 6° que si A et B permutent, e^A et e^B font de même.

1° Montrer inversement que si e^A et e^B sont permutables et non scalaires, alors A et B sont permutables et non scalaires.

2° Caractériser, par une condition portant sur $\alpha_1 - \alpha_2$, les matrices A ayant 2 valeurs propres distinctes et telles que e^A soit scalaire.

3° Résoudre l'équation $e^X = I$. Quelle est la solution X de la forme $X = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{pmatrix}$ où $q \in \mathbb{R}^+$ est le plus petit possible ?

4° Résoudre l'équation $e^X = e^A$, où e^A est non scalaire.

Les questions II, 1° à 5° étant indépendantes de la partie I, elles peuvent donc être étudiées directement.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail